C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275 (9 octobre 1972) Série B — 569

SISMOLOGIE. — *Sur la convergence de certains développements de sismogrammes synthétiques obtenus par la méthode de l'eikonal.* Note (*) de M. **Émile Okal**, présentée par M. Jean Coulomb.

Nous discutons la convergence des développements en série obtenus par la méthode de l'eikonal dans un cas particulier où le calcul théorique est entièrement possible par la méthode de l'intégrale de Carson. Nous prouvons la divergence de ce développement au bout d'un temps fini.

La méthode de l'eikonal, telle qu'elle est, par exemple, décrite par Hron [(1), (2)], est basée sur l'ensemble d'hypothèses fondamentales suivantes :

— Le vecteur déplacement $\vec{u}(x, y, z; t)$ est recherché sous forme d'un développement

$$(1) \qquad \vec{u}(x, y, z; t) = \sum f_k(t - \tau(x, y, z)) . \vec{W}_k(x, y, z).$$

— Les fonctions f_k vérifient $f'_k = f_{k-1}$.

— Les fonctions $\vec{W}_k$ et τ, indépendantes du temps, sont indépendantes de la fonction d'excitation f_0, pourvu que l'on conserve la symétrie de la source.

Ces hypothèses permettent de séparer excitation f et propagation $\vec{W}$. Le problème de la convergence du développement (1) n'est en général pas discuté dans la littérature. En effet, il est impossible, dans la plupart des cas, d'obtenir une expression générale du $k^{\text{ième}}$ terme. C'est pourquoi nous l'étudierons dans un cas particulier où le calcul de $\vec{u}$ peut être entièrement mené à bien.

C'est le cas, par exemple, du problème d'une source à symétrie sphérique située à la profondeur h dans un milieu semi-infini surmonté par le vide. Nous supposerons en outre la fonction f_0 égale à 1 pendant l'intervalle $\{0, T\}$ et nulle en dehors. On peut alors facilement vérifier que le développement (1) prend l'aspect d'une série entière de la variable $(t - R/\Omega_1)$.

Dans ce cas, la méthode de Cagniard (3) permet de calculer exactement le déplacement à la surface : Nous raisonnons par exemple sur la composante horizontale l_ρ du déplacement, qui s'obtient sous la forme

$$(2) \qquad l_\rho = A f_0\left(t - \frac{R}{\Omega_1}\right) - B \int_{\frac{R}{\Omega_1}}^{t} S_\rho(v) f_0(t - v)\, dv.$$

A et B sont deux constantes ne dépendant que du point choisi. Ω_1 est la vitesse des ondes P; R est la distance à la source, ρ est la distance à la projection de la source et l'on a

$$S_\rho(v) = C \int \frac{bu^3\, du}{D(u)\,\{u^2 \rho^2 + (v - ah)^2\}^{3/2}};$$

$$a = \sqrt{u^2 + \frac{1}{\Omega_1^2}}, \qquad b = \sqrt{u^2 + \frac{1}{\Omega_2^2}}, \qquad D(u) = \left(u^2 + \frac{1}{2\,\Omega_2^2}\right)^2 - abu^2.$$

L'intégrale est prise sur un contour du plan complexe se décomposant en trois parties :

1. La première donne un terme indépendant de v qui ne contribue à l_ρ que par un terme en f_1.

2. La deuxième, responsable de l'onde de Rayleigh, s'obtient par un calcul de résidus autour des pôles de D et conduit à

$$S_\rho^{(2)}(v) = K.\,\mathrm{Im}\{(\tau^2 - m^2 + \cos^2 I + 2\,i\,\tau \cos I \sqrt{m^2 - 1})^{-3/2}\} = \mathrm{Im}\,(G).$$

$\tau = \Omega_1 v/R$; m est une constante numérique et I l'angle d'incidence. G est développable en série entière de la variable $x = \tau - 1$, le rayon de convergence $\mathcal{R}$ étant le module du pôle $x_0 = m \sin I - 1 - i \cos I \sqrt{m^2 - 1}$ de plus petit module.

Or pour cette valeur x_0, on montre facilement, en multipliant par la quantité conjuguée, que la partie imaginaire de G devient infinie. Le rayon de convergence du développement de $S_\rho^{(2)}$ est effectivement $\mathcal{R}$ bien que l'on ne prenne que la partie imaginaire de G.

3. Il suffit alors de prouver que le terme $S_\rho^{(3)}$, issu de la troisième intégrale, ne devient pas infini pour $x = x_0$; d'après les propriétés des séries entières, le rayon de convergence de $S_\rho^{(2)} + S_\rho^{(3)}$ ne saurait alors excéder $\mathcal{R}$.

Or $S_\rho^{(3)}$ est le terme de l'expression (2) provenant de l'intégration autour d'une coupure de l'axe imaginaire allant de $-i/\Omega_2$ à $+i/\Omega_2$. Il ne peut être infini que si la fonction à intégrer devient infinie pour un point de ce segment. Or $D(u)$ a ses pôles extérieurs à ce segment; reste $\rho^2 u^2 + (v - ah)^2$, qui pour $v = v_0$ ne possède que la racine $u^2 = -1/\Omega_R^2$. Par ailleurs, une étude plus détaillée ([4]) montre que $S_\rho^{(3)}$ est effectivement développable en série entière avec un rayon de convergence non nul. En conséquence, le rayon de convergence de $S_\rho^{(2)} + S_\rho^{(3)}$ est au plus $\mathcal{R}$. $l_\rho(t)$ étant la primitive de $S_\rho(x)$, elle a même rayon de convergence. Celui-ci étant indépendant de T, on peut supposer T assez grand pour que, dans toutes les intégrales envisagées, on ait $f_0 = 1$.

En conclusion, S_ρ ne possède, dans ce cas, qu'un rayon de convergence fini. Or le développement (1) coïncide nécessairement, pour des raisons d'unicité, avec le développement de S_ρ en série entière. Il diverge certainement pour le temps $t = R/\Omega_1 (1 + m - \sin I)$.

Il est vraisemblable que pour l_z, ainsi que dans le cas d'autres fonctions f_k, on obtiendrait les mêmes propriétés (4).

(*) Séance du 2 octobre 1972.

(1) F. Hron, *Introduction to the ray theory in a broader sense; applications to seismology*, École Normale Supérieure, Paris, 1968.

(2) F. Hron et E. R. Kanasewich, *Bull. Seism. Soc. Amer.*, 61, 1971, p. 1169.

(3) L. Gagniard, *Réflexion et réfraction des ondes sismiques progressives*, Gauthier-Villars, Paris, 1939.

(4) P. Mechler et E. Okal (à paraître).

Groupe de Géophysique,
Laboratoire de Physique
de l'École Normale Supérieure,
24, *rue Lhomond,*
75231 *Paris.*